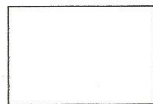


EXAMEN PARCIAL DE MÉTODOS MATEMÁTICOS III GRUPO: 1ºA
TEMAS 1, 2 y 3(Cálculo)) (10-05-2016)



Inicial del 1º apellido

APELLIDOS.....

NOMBRE.....

PROBLEMA 1. (1 pto.)

Determina el intervalo de convergencia de la serie de potencias:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n(n-1)}{n^2+n} x^{n+1}$$

PROBLEMA 2. (1 pto.)

Halla:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} [xy \cdot \ln(x^2 + y^2)]$$

PROBLEMA 3. (1 pto.)

Utilizando el hessiano, determina para la función: $f(x,y) = x^3 - 6xy + y^3$, los puntos críticos y clasificalos.

PROBLEMA 4. (1,5 ptos.)

Determina los extremos condicionados de $f(x,y) = 1 - \left(\frac{x^2}{4} + y^2\right)$ con la condición:

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

PROBLEMA 5. (1,5 ptos)

Aproxima la función mediante un polinomio de Maclaurin de grado 3. Determina una cota del error cometido cuando se utiliza el polnomio anterior para $x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$. *Viendo*

$$f(x) = e^x \cos x$$

PROBLEMA 6. (2 ptos.)

Determina si la siguiente función es continua y diferenciable en el (0,0) :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{2x^2 + 3y^2 - xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

PROBLEMA 7. (2 ptos.)

Calcula: $\iint_R x \, dx \, dy$ siendo R la región del primer cuadrante limitada por $x^2 + y^2 = 25$,

$$3x - 4y = 0 \in y = 0$$



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID
FACULTAD DE
ESTUDIOS ESTADÍSTICOS

Ejercicios del ALUMNO

APELLIDOS

NOMBRE

D.N.I. N.º

ASIGNATURA

GRUPO

CURSO

N.º DE MATRÍCULA

FECHA

PROB. 1

$$\lim_n \left| \frac{2^{n+1} \cdot n \cdot x^{n+2}}{(n+1)^2 + (n+1)} \cdot \frac{2^n (n-1) \cdot x^{n+1}}{n^2 + n} \right| =$$

$$= \lim_n \left| \frac{2^{n+1} \cdot n \cdot x^{n+2} (n^2 + n)}{2^n (n-1) x^{n+1} [(n+1)^2 + (n+1)]} \right| =$$

$$= \lim_n \left| \frac{2 n x (n^2 + n)}{(n-1) [n^2 + 2n + 1 + n + 1]} \right| =$$

$$= \lim_n \left| \frac{2 x (n^3 + n^2)}{(n-1) (n^2 + 3n + 2)} \right| = |2x| < 1$$

$$|x| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}} \text{ conv.}$$

$$\text{h. } x = -\frac{1}{2} ; \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n (n-1)}{n^2 + n} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n-1)}{2 n^2 + n}$$

conv.
(por Leib.)

$$\text{h. } x = \frac{1}{2} ; \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{(n-1)}{n^2 + n} \quad \text{DIV} \quad \left(\text{por comp. con } \sum \frac{1}{n} \right)$$

$$\text{INT. DE CONV. : } \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID
FACULTAD DE
ESTUDIOS ESTADÍSTICOS

Ejercicios del ALUMNO

APELLIDOS

NOMBRE D.N.I. N.º

ASIGNATURA GRUPO

CURSO N.º DE MATRÍCULA FECHA

PROB. 2 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} [xy \cdot \ln(x^2+y^2)] = 0 \cdot (-\infty) \text{ IND}$

$$\lim_{r \rightarrow 0} (r^2(\cos \alpha)(\text{sen } \alpha) \cdot \ln(r^2)) =$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln(r^2) (\cos \alpha)(\text{sen } \alpha)}{\frac{1}{r^2}} =$$

$$= (\cos \alpha)(\text{sen } \alpha) \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln(r^2)}{\frac{1}{r^2}} =$$

$$= (\cos \alpha)(\text{sen } \alpha) \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{2r}{r^2}}{\frac{-2r}{r^4}} = (\cos \alpha)(\text{sen } \alpha) \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2r^5}{-2r^3} =$$

$$= (\cos \alpha)(\text{sen } \alpha) \lim_{r \rightarrow 0} (-r^2) = \boxed{0}$$



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID
FACULTAD DE
ESTUDIOS ESTADÍSTICOS

Ejercicios del ALUMNO

APELLIDOS

NOMBRE D.N.I. N.º

ASIGNATURA GRUPO

CURSO N.º DE MATRÍCULA FECHA

PROB. 3 $f'_x = 3x^2 - 6y$ $\begin{cases} f''_{xx} = 6x \\ f''_{xy} = -6 \end{cases}$
 $f'_y = -6x + 3y^2$ $\begin{cases} f''_{yx} = -6 \\ f''_{yy} = 6y \end{cases}$

PTOS. CRÍTICOS

$$\begin{cases} 3x^2 - 6y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2y = 0 \\ -6x + 3y^2 = 0 \Leftrightarrow -2x + y^2 = 0 \Leftrightarrow 2x = y^2 \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{2} \end{cases}$$

$$\frac{y^4}{4} - 2y = 0 \Leftrightarrow y^4 - 8y = 0 \Leftrightarrow y(y^3 - 8) = 0$$

$$y = 0 \vee y = 2$$

$$\text{PTOS. CRÍTICOS } \begin{cases} (0, 0) \\ (2, 2) \end{cases}$$

$$H(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0 \text{ en } (0,0) \text{ hay } \underline{\text{PTO. de SILLA}}$$

$$H(2,2) = \begin{vmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 12 \end{vmatrix} > 0 \wedge 12 > 0; \text{ en } (2,2) \text{ hay } \underline{\text{un MÍNIMO}}$$



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID
FACULTAD DE
ESTUDIOS ESTADÍSTICOS

Ejercicios del ALUMNO

APELLIDOS

NOMBRE D.N.I. N.º

ASIGNATURA GRUPO

CURSO N.º DE MATRÍCULA FECHA

PROB. 4 $\nabla f = \left(-\frac{2x}{4}, -2y\right)$; $h(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1$

$$\nabla h = \left(2x, \frac{2y}{4}\right)$$

$$\nabla f = \left(-\frac{x}{2}, -2y\right) \quad y \quad \nabla h = \left(2x, \frac{y}{2}\right)$$

$$\left(-\frac{x}{2}, -2y\right) = \lambda \left(2x, \frac{y}{2}\right)$$

$$\begin{cases} -\frac{x}{2} = 2\lambda x \xrightarrow{x \neq 0} -\frac{1}{2} = 2\lambda \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{4} \\ -2y = \frac{1}{2}\lambda y \xrightarrow{y \neq 0} -2 = \frac{1}{2}\lambda \Rightarrow \lambda = -4 \\ x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \quad \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} (!!)$$

Luego: $x=0$ v $y=0$

$$\text{h. } x=0 \Rightarrow \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2 \Rightarrow \begin{matrix} (0,2) \\ (0,-2) \end{matrix}$$

$$\text{h. } y=0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow \begin{matrix} (1,0) \\ (-1,0) \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} f(0,2) &= 1 - 4 = -3 \\ f(0,-2) &= 1 - 4 = -3 \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \text{en } (0,2) \text{ y } (0,-2) \text{ hay MÍNIMO LOCAL} \\ f(1,0) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ f(-1,0) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \end{array} \right| \quad \left. \begin{matrix} \\ \end{matrix} \right| \text{ en } (1,0) \text{ y } (-1,0) \text{ hay MÁXIMO LOCAL.}$$



APELLIDOS		
NOMBRE D.N.I. N.º		
ASIGNATURA		GRUPO
CURSO	N.º DE MATRÍCULA	FECHA

$$f'(x) = e^x + \ln x \rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = e^x + \cos x \Rightarrow f''(0) = 2$$

$$f'''(x) = e^x - \sin x \Rightarrow f'''(0) = 1$$

$$P_3(x) = 0 + x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 = \underline{x + x^2 + \frac{1}{6}x^3}$$

$$R_3(x) = \left| \frac{f^{(4)}(c)}{4!} x^4 \right| = \left| \frac{e^c - \cos c}{4!} x^4 \right| \leq$$

$$[-\frac{1}{4} \quad 0 \quad x \quad \frac{1}{4}]$$

$$\leq \frac{|e^c - \cos c|}{4!} \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{|e^c - \cos c|}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot \frac{1}{4^4} =$$

$$\frac{|e^c - \cos c|}{6.144} < \frac{e^{1/4} - \cos \frac{1}{4}}{6.144} = \frac{0.31511}{6.144} = 5.1287 \times 10^{-3}$$



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID
FACULTAD DE
ESTUDIOS ESTADÍSTICOS

Ejercicios del ALUMNO

APELLIDOS

NOMBRE

D.N.I. N.º

ASIGNATURA

GRUPO

CURSO

N.º DE MATRÍCULA

FECHA

PROB. 6

$$d' \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{2x^2+3y^2-xy} = 0?$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3(\cos \alpha)(\sec^2 \alpha)}{2r^2 \cos^2 \alpha + 3r^2 \sec^2 \alpha - r^2(\cos \alpha)(\sec \alpha)}$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r(\cos \alpha)(\sec^2 \alpha)}{2 \cos^2 \alpha + 3 \sec^2 \alpha - (\cos \alpha)(\sec \alpha)} = 0$$

f es continua

$$f'_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{2h^2+0-0}}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{2h^3} = \boxed{0}$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0+3h^2-0}{0}}{h} = \boxed{0}$$

$$\lim_{h \rightarrow (0,0)} \frac{f(h_1, h_2) - f(0,0) - (f'_x(0,0)h_1 + f'_y(0,0)h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

$$= \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{h_1 h_2^2}{2h_1^2 + 3h_2^2 - h_1 h_2}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{h_1 h_2^2}{(2h_1^2 + 3h_2^2 - h_1 h_2) \sqrt{h_1^2 + h_2^2}} =$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3(\cos \alpha)(\sec^2 \alpha)}{(2r^2 \cos^2 \alpha + 3r^2 \sec^2 \alpha - r^2(\cos \alpha)(\sec \alpha)) \cdot r} \quad (No) \text{ es diferenciable}$$



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID
FACULTAD DE
ESTUDIOS ESTADÍSTICOS

Ejercicios del ALUMNO

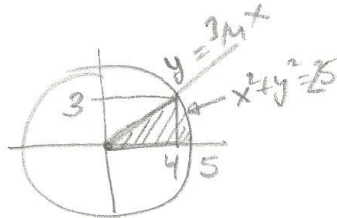
APELLIDOS

NOMBRE D.N.I. N.º

ASIGNATURA GRUPO

CURSO N.º DE MATRÍCULA FECHA

PROB. 7



$$4y = 3x \Rightarrow y = \frac{3}{4}x$$

$$y = \frac{3}{4}x$$

$$x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow x^2 + \frac{9}{16}x^2 = 25$$

$$\frac{25x^2}{16} = 25 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$$

$$\iint_R x \, dx \, dy = \int_0^3 \int_{\frac{4}{3}y}^{\sqrt{25-y^2}} x \, dx \, dy =$$

$$= \int_0^3 \left(\frac{x^2}{2} \right)_{\frac{4}{3}y}^{\sqrt{25-y^2}} dy = \int_0^3 \left(\frac{25-y^2}{2} - \frac{16}{9} \frac{y^2}{2} \right) dy =$$

$$= \int_0^3 \left(\frac{25-y^2}{2} - \frac{16y^2}{18} \right) dy = \int_0^3 \frac{225-9y^2-16y^2}{18} dy =$$

$$= \int_0^3 \left(\frac{225}{18} - \frac{25y^2}{18} \right) dy = \frac{225}{18} (y) \Big|_0^3 - \frac{25}{18} \left(\frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^3 =$$

$$= \frac{225}{18} 3 - \frac{25}{18} \frac{3^3}{3} = \frac{225}{6} - \frac{25}{18} 9 = \frac{225}{6} - \frac{25}{2} =$$

$$= \frac{225-75}{6} = \boxed{\frac{150}{6}}$$